Министерство образования, науки и молодёжи Республики Крым

**Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования Республики Крым
«Крымский инженерно-педагогический
университет имени Февзи Якубова»**

Гельфанова Д.Д.

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задачник

Симферополь

2024

УДК 512
ББК 22.1
Г32

*Рекомендовано к печати Ученым советом факультета
Психологии и педагогического образования
Государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования Республики Крым
«Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова».
Протокол № 8 от 18апреля 2024 г.*

Рецензент:

Берзинь С.Д., методист МБУ ДПО «Информационно-методический центр» г. Симферополя

Автор/Составитель:

Гельфанова Д.Д., кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и физики ГБОУВО РК КИПУ имени Февзи Якубова

Гельфанова Д.Д.

Г32 ***Сборник олимпиадных задач по математике*** : *задачник* / *Д.Д. Гельфанова*. – Симферополь : РИО КИПУ имени Февзи Якубова, 2024. – 10 с.

Сборник задач состоит из четырех тем, в которых рассмотрены избранные олимпиадные задачи по математике.

Материалы могут быть полезны для обучающихся средних школ, педагогов образовательных учреждений общего и дополнительного образования.

УДК 512
ББК 22.1

Предисловие

Дорогой читатель!

Этот мини-сборник состоит из избранных задач олимпиад по математике. Задачи разбиты по разделам:

1. Общая математическая культура.
2. Комбинаторика и логика.
3. Алгебра и теория чисел.
4. Геометрия

Это разбиение соответствует тематике задач и нужным для их решения знаниям.

При подготовке к олимпиадам следует уделять внимание в первую очередь сильным сторонам. Для того, чтобы стать призёром, обычно достаточно решить 60% варианта. Добившись практически абсолютной результативности в наиболее интересных разделах, можно переходить к изучению всех остальных разделов и тренировке по ним. Однако необходимо обладать достаточно широкой эрудицией, чтобы не упустить задачи, которые находятся на стыках разделов.

1. Общая математическая культура.

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинаковой квадратной формы и одинакового размера. Каждое стекло своими диагоналями условно разделено на 4 одинаковые части (прямоугольные треугольники), и один из этих треугольников закрашен непрозрачной краской своего индивидуального цвета, отличного от цветов закраски других стекол. Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин) закрашенными частями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся она в итоге оказалась полностью непрозрачной в вертикальном направлении.

2. В десятизначной записи числа 73 цифры и все они единицы. Делится ли нацело это число на 18.

3. Десять машин выпускают одинаковые резиновые мячи массой по 10г каждый. Одна из машин испортилась и стала выпускать мячи массой 5г. Как найти испортившуюся машину с помощью одного взвешивания мячей.

4. Один маляр может покрасить забор за 1 час, а второй за 45 минут. Начав работу одновременно, они проработали 20 минут, после чего первый прекратил работу. Сколько нужно времени, чтобы один второй маляр закончил работу?

5. Для того, чтобы пройти 2 км. пешком, проехать 3 км. на велосипеде и 20 км – на машине, дяде Ване требуется 1 час 6 мин. А если потребуется пройти 5 км. пешком, проехать 8 км. на велосипеде и 30 км – на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется дяде Ване, чтобы пройти 4 км. пешком, проехать 5 км. на велосипеде и 80 км – на машине?

6. Для того, чтобы пройти 4 км. пешком, проехать 6 км. на велосипеде и 40 км – на машине, дяде Ване требуется 2 час 12 мин. А если потребуется пройти 5 км. пешком, проехать 8 км. на велосипеде и 30 км – на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется дяде Ване, чтобы пройти 8 км. пешком, проехать 10 км. на велосипеде и 160 км – на машине?

7. Два трактора вместе вспахивают поле за 4 дня. Если первый трактор проработает 3 дня, а затем второй – 5 дней, то будет вспахано 95% этого поля. За сколько дней может вспахать поле один второй трактор?

8. Имеется 2-литровая банка, полностью наполненная молоком 4% жирности, и 3-литровая банка с 2 литрами обезжиренного молока. Назовем «обменом» такую операцию: сначала 3-литровую банку доливают до краев содержимым 2-литровой банки, затем делают наоборот. Какое минимальное количество «обменов» нужно совершить, чтобы концентрация жира в банках различалась менее чем на 0,01%?

2. Комбинаторика и логика.

1. В ряд выписано несколько букв А и Б. Среди любых подряд выписанных 100 букв А и Б встречаются поровну раз, а среди любых 102 букв подряд — не поровну. Какое наибольшее число букв может располагаться в этом ряду?

2. Иван Царевичу нужно раздобыть молодильные яблоки. Баба Яга, Кощей и Леший дали ему следующие ответы. Баба Яга: «Да у Кощея они. Забрал и уже 100 лет как не отдает. А Леший – добрый малый: если были бы они у него, то дал бы мне». Кощей: «Баба Яга – плутовка, спрятала, у нее они, а у меня их нет». Леший: «Нет у меня их. Зачем они мне? Я и без них красивый. И у Бабы Яги их нет: совсем старая стала». Василиса Премудрая предупредила Ивана, что вся эта троица – врунишки, правды никто из них никогда не скажет, а молодильные яблоки хотя бы у одного из них есть. У кого есть молодильные яблоки? У кого их нет? О ком недостаточно информации? (Утверждение «А и В» ложно тогда и только тогда, когда ложно хотя бы одно из утверждений А или В)?

3. В ряд стоит 100 лукошек с малиной: в первом одна ягода, во втором две, в третьем три и так далее. Время от времени является мистер Фокс и съедает одно и то же число ягод из нескольких лукошек (разумеется, в каждом

ягод должно быть не меньше числа, которое выбрал мистер Фокс). За какое наименьшее число визитов мистер Фокс съест всю малину?

4. На острове живут только лжецы, которые всегда лгут, и рыцари, которые всегда говорят правду. Однажды выстроились в один ряд 20 жителей этого острова. Каждый, кроме трёх самых крайних справа, сказал: «Мой сосед справа – лжец». Самый правый сказал: «Мой сосед слева – балда», а тот возмутился: «Я не балда!» Сколько лжецов в строю?

5. В кучке имеется n > 1 камней. Двое по очереди берут камни из этой кучки: минимум 7 и максимум 19 камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каком наименьшем n>124 у второго игрока есть выигрышная стратегия?

3. Алгебра и теория чисел.

1. Найти x и y, которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$(x-y)^2+\left(y-2\sqrt{x}+2\right)^2=\tfrac{1}{2}\,.$$

2. Решите уравнение

$$(x-2020)^2+(x-2020)^{10}=2(x-2020)^{12}\,.$$

3. Найдите все значения m, при которых любое решение уравнения

$$2018\cdot\sqrt[5]{6{,}2x-5{,}2}+2019\cdot\log_5(4x+1)+m=2020$$

принадлежит промежутку [1 ; 6].

4. Найдите все значения m, при которых любое решение уравнения

$$2019\cdot\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+2018\cdot\log_2(3x-1)+m=2020$$

принадлежит промежутку [1 ; 3].

5. Докажите, что для $a<1$, $b<1, c<1$ $a+b+c\geq\frac{1}{3}$ выполняется неравенство

$$(1-a)(1-b)(1-c)\leq\frac{512}{729}$$

6. Докажите, что для $a<1$, $b<1, c<1$ $a+b+c\geq\frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{125}{216}.$$

7. Докажите, что для любых положительных чисел $a,\ b,\ c$ выполняется неравенство

$$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1.$$

8. Докажите, что для корней $x_1,\ x_2, x_3$ многочлена $ax^3 - ax^2 + bx + b$ с ненулевыми коэффициентами a и b справедливо равенство

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1.$$

9. Навигатор на «Лексусе» бизнесмена Фокса сообщает, сколько осталось ехать до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Фокс выехал из дома на дачу. В середине пути навигатор сообщил, что осталось ехать X. В этот момент прямо перед «Лексусом» на дорогу выехал тракторист Форд, обогнать которого не было никакой возможности. После того как Фокс проехал половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось ехать Y . Через сколько часов после этого приедет на дачу бизнесмен, если так и не обгонит тракториста?

10. Даны положительные числа a1 < a2 < ... < aX. Оказалось, что ak в Y раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k?

4. Геометрия.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB=1см, AD=2, AA_1=1. Найти наименьшую площадь треугольника PA_1C, вершина P которого лежит на прямой AB_1.

2. В равнобедренной трапеции основания 21см, 9см и высота 8см. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

3. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение, которое является квадратом. Найдите объем пирамиды, если сторона основания равна a, сторона квадрата в сечении равна b.

4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, высотой которой является ребро $SA=25$. Точка P принадлежит медиане DM грани SCD, точка Q принадлежит диагонали BD и прямые AP и SQ пересекаются. Найдите длину PQ, если $BQ{:}QD = 3{:}2$.

5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC из вершин B и D к диагонали AC проведены перпендикуляры BH и DK. Известно, что основания перпендикуляров лежат на отрезке AC и $AC{:}AK{:}AH = 20{:}19{:}3$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

6. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD, длины которых равны 10, из вершин B и D к диагонали AC проведены перпендикуляры BH и DK. Известно, что основания перпендикуляров лежат на отрезке AC и $AH{:}AK{:}AC = 5{:}14{:}15$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

7. Точка D лежит на окружности радиуса 3, описанной около равнобедренного треугольника ABC. Высота этого треугольника, проведенная к основанию AC, равна 1,5. Найдите площадь треугольника DBC, если $DB=2\sqrt{3}$.

8. Окружность радиуса $R_1 = 3$ вписана в прямоугольный треугольник ABC с углом $\angle B = 90^\circ$. Вторая окружность радиуса $R_2 = 1$ касается первой окружности и отрезков AC и AB . Найдите длины сторон треугольника ABC.

9. Известно, что площадь выпуклого четырехугольника равна 32, а сумма длин двух противоположных сторон и одной диагонали равна 16. Какие значения может принимать длина другой диагонали?

10. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна 0,5 . Вписанная в четырехугольник BDEC окружность касается стороны AB в точке K , причем AK = 3 . Найдите тангенс угла BAC , если около четырехугольника BDEC можно описать окружность, и BC = 15 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Физматкнига, 2006.

2. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1. – М.: Просвещение, 2008.

3. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2. – М.: Просвещение, 2009.

4. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986.

5. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

6. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2005.

7. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Изд. 5-е испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2006.

8. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / Под ред. В.М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006.

9. Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/

Учебное издание

Электронное издание

Гельфанова Диляра Дамировна

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Составитель:

Гельфанова Диляра Дамировна

Задачник

Подписано в печать 18.04.2024. Формат $60\times84^{1/16}$.
Гарнитура Times New Roman.
Уч.-изд. л. 1,8. Объем 0,58 печ. л.

Редакционно-издательский отдел Государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Республики Крым «Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова»
295015, г. Симферополь, пер. Учебный, 8