Министерство образования, науки и молодёжи Республики Крым

**Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования Республики Крым
«Крымский инженерно-педагогический
университет имени Февзи Якубова»**

Гельфанова Д.Д.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Методические рекомендации

Симферополь

2024

УДК 512
ББК 22.1
Г32

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета
Психологии и педагогического образования
Государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования Республики Крым
«Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова».
Протокол № 8 от 18 апреля 2024 г.

Рецензент:

Берзинь С.Д., методист МБУ ДПО «Информационно-методический центр» г. Симферополя

Автор/Составитель:

Гельфанова Д.Д., кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и физики ГБОУВО РК КИПУ имени Февзи Якубова

Гельфанова Д.Д.

Г32 ***Примеры решения олимпиадных задач по математике*** : *методические рекомендации* / *Д.Д. Гельфанова*. – Симферополь : РИО КИПУ имени Февзи Якубова, 2024. – 20 с.

В методических рекомендациях рассмотрены советы по подготовке к олимпиаде, содержание заданий олимпиады, критерии оценивания заданий и примеры решения некоторых олимпиадных задач по математике.

Материалы могут быть полезны для обучающихся средних школ, педагогов образовательных учреждений общего и дополнительного образования.

УДК 512
ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ

Подготовка к олимпиаде и содержание заданий олимпиады

Олимпиада «Прыжок в будущее» проводится в два этапа. Первый этап является отборочным. Его результат, если он привел к проходу на второй этап, далее не учитывается. Он проводится в дистанционном формате с автоматизированной проверкой ответов. Запись решений не предполагается. Второй этап является заключительным, именно по его результатам определяются победители и призеры. По формату второй этап — классическая письменная олимпиада с полноценным оформлением и последующей проверкой решений. Часть задач — задачи на вычисление каких-то элементов, часть — задачи на доказательство различных утверждений, а часть задач содержит в себе и первое и второе. Как и любая олимпиада, «Прыжок в будущее» требует от участников не столько специфических знаний, сколько умения изобретательно применять и комбинировать знания, полученные во время основных школьных занятий, а также дополнительных занятий в формате очных кружков, дистанционных курсов или самостоятельной работы с литературой. Простого алгоритма, как развить в себе такие умения и тем самым подготовиться к олимпиаде, нет, на то она и олимпиада, но хорошее освоение школьной программы, дополнительные занятия математикой, самостоятельная работа и опыт участия в других олимпиадах, конечно, помогают. Подчеркнем, что вариант олимпиады направлен не на непосредственную проверку знания формулировок определений, теорем и подобного, а состоит из математических задач, которые требуется решить. А для того, чтобы подготовиться к решению задач, нужно решать задачи.

Рекомендуем обратить особое внимание на сборники задач и на варианты различных олимпиад сопоставимого уровня, в частности, на этапы Всероссийской олимпиады школьников, на международную олимпиаду «Турнир городов», на Московскую и Санкт-Петербургскую математические олимпиады. Приведем список тем и умений, на который рекомендуем обратить внимание в процессе подготовки. Список не является полным перечислением всего, что может быть, а акцентирует внимание на наиболее важных для подготовки темах и методах, находящихся на границе школьной программы. Подразумевается, что основную школьную программу участник и так знает в достаточной степени. В связи с тем, что одни и те же методы и темы, но на разном уровне сложности, встречаются в олимпиадах разных классов, и для формирования более полной картины, мы не стали разбивать список на классы. Рекомендуем ориентироваться на школьную программу, включая материал дополнительных глав учебников, на литературу, перечисленную ниже и на варианты прошлых лет олимпиад, перечисленных выше.

Общая математическая культура

- Умение ясно формулировать определения, леммы и теоремы, используемые при решении задачи.

- Умение корректно формулировать отрицания данных утверждений, утверждения эквивалентные данным, утверждения, являющиеся следствиями данных.

- Понимание того, что является, а что не является корректным и полным математическим доказательством.

- Знание основных типов вопросов в задачах и умение понимать, что в них требуется в качестве решения. Например, понимание того, что задача с формулировкой “можно ли”, как правило, требует или контрпримера, в одном случае, или доказательства в другом. Или понимание того, что ответ на вопрос про наибольшее или наименьшее возможное количество, как правило, состоит из двух частей – примера для искомого количества и доказательства того, что большим (меньшим) обойтись нельзя.

Комбинаторика и логика

- Полный перебор, грамотная организация перебора.

- Идея упорядочивания в комбинаторных и алгебраических задачах. ● Решения задач от противного и принцип Дирихле.

- Принцип крайнего.

- Круги Эйлера и формула включений-исключений.

- Логические задачи. Анализ истинных и ложных высказываний. Таблицы истинности. Задачи про рыцарей и лжецов. Задачи про мудрецов.

- Четность: арифметика, разбиение на пары, чередование.

- Процессы: инварианты и полуинварианты, зацикливание, дискретная непрерывность. - Алгоритмы и конструктивы: переправы, переливания. Взвешивания и теория информации.

- Метод математической индукции: задачи на постепенное конструирование, применение при решении задач разной природы: алгебра, комбинаторика, геометрия.

- Подсчет числа способов. Задачи на соответствия. Правила сложения и умножения. Факториал. Числа сочетаний, бином Ньютона и треугольник Паскаля. Алгебраические тождества с числами сочетаний и их комбинаторный смысл. Метод “шаров и перегородок”. Рекуррентные соотношения, производящие функции, числа Фибоначчи, числа Каталана.

- Игры: симметричные стратегии, выигрышные и проигрышные позиции, передача хода.

- Теория графов. Перевод условия задачи на язык графов. Лемма о рукопожатиях. Связность. Двудольные графы и подсчет двумя способами. Деревья. Эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы в графах. Раскраски графов. Планарные графы и формула Эйлера. Ориентированные графы.

Алгебра и теория чисел

- Алгебраические преобразования и формулы сокращенного умножения.

- Текстовые задачи: движение по прямой и по кругу, задачи на работу, сплав и смеси.

- Десятичная запись числа и признаки делимости. Разложение числа на простые множители. Основная теорема арифметики. НОД и НОК. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Линейные диофантовы уравнения.

- Арифметика остатков, сравнения по модулю. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона. Китайская теорема об остатках. Теорема Эйлера. Уравнения в целых числах.

- Работа с иррациональными числами.

- Системы счисления.

- Неравенства. Неравенства о средних. Транснеравенство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Метод Штурма. Неравенство Йенсена.

- Квадратный трехчлен: формулы корней, теорема Виета, график и его свойства.

- Многочлены: алгебра многочленов, теорема Безу, теорема о рациональных корнях, теорема Виета. Разложение многочлена на неприводимые. Интерполяционный многочлен.

- Перестановки. Умножение перестановок. Разложение в независимые циклы и порядок перестановки. Сортировки и разложение в произведение транспозиций. Четность перестановки.

- Линейная алгебра. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

- Функциональные уравнения и неравенства.

Геометрия

- Четвертый признак “равенства” треугольников.

- Дополнительные построения, связанные с осевой и центральной симметрией. Перекладывание отрезков. Удвоение медианы.

- Неравенство о соотношении углов и сторон в треугольнике. Неравенство треугольника.

- Параллелограмм Вариньона.

- Теоремы Чевы и Менелая.

- Вписанные и вневписанные окружности. Точки Жергона и Нагеля.

- Окружность девяти точек и прямая Эйлера.

- Вписанные углы, угол между касательной и хордой. Вписанные четырехугольники и вспомогательные окружности. Ортотреугольник и отражения ортоцентра. Лемма Фусса. Прямая Симсона. Середины дуг: лемма Архимеда и лемма о трезубце.

- Отрезки касательных и описанные четырехугольники.

- Пропорциональные отрезки, связанные с окружностью. Степень точки относительно окружности, радикальная ось, радикальный центр.

- Движения плоскости: классификация, композиция движений, применение при решении задач.

- Преобразования плоскости: гомотетия, поворотная гомотетия, изогональное сопряжение.

- Триангуляция многоугольника.

- Многоугольники на решетке. Формула Пика.

- Стереометрические задачи. Равногранные и ортоцентрические тетраэдры.

Критерии оценивания

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов. Баллы не выставляются за старание участника, в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи. Каждый билет содержит пять задач.

Время выполнения работы: 240 минут.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания одной задачи. Максимальный балл по билету – 35.
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Примеры решения задач олимпиады по математике.

1. Найти x и y, которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$(x-y)^2+\left(y-2\sqrt{x}+2\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\boldsymbol{x=1,\ y=\frac{1}{2}}$**.**

Решение:

Пусть $u=(\sqrt{x}-1)^2+1=x-2\sqrt{x}+2\geq 1, v=y-2\sqrt{x}+2.$

Тогда $y-x=v-u$ и исходное уравнение примет вид

$$(v-u)^2+v^2=\frac{1}{2}.$$

$$v^2-2uv+u^2-\frac{1}{2}=0.$$

Рассматривая последнее уравнение как квадратное относительно v, и учитывая не отрицательность дискриминанта, получим

$$u^2\leq 1.$$

Следовательно, $u=1, v=\frac{1}{2}$. Тогда $x=1,\ y=\frac{1}{2}$.

2. Для того, чтобы пройти 2 км. пешком, проехать 3 км. на велосипеде и 20 км – на машине, дяде Ване требуется 1 час 6 мин. А если потребуется пройти 5 км. пешком, проехать 8 км. на велосипеде и 30 км – на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется дяде Ване, чтобы пройти 4 км. пешком, проехать 5 км. на велосипеде и 80 км – на машине?

Ответ: 2 часа 54 минуты. (2,9 ч.)

Решение:

Пусть $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ – скорости ходьбы, езды на велосипеде и машине соответственно.

Тогда составим систему, согласно условию задачи:

$$\begin{cases}2x+3y+20z=66,\\5x+8y+30z=144.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y=66-20z,\\5x+8y=144-30z.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=96-70z,\\y=40z-42.\end{cases}$$

Следовательно, $4x+5y+80z=4(96-70z)+5(40z-42)+80z=174$ мин.

$$174 \text{ мин.} = 2 \text{ часа } 54 \text{ мин.}$$

3. Найдите все значения m, при которых любое решение уравнения

$$2019 \cdot \sqrt[3]{3{,}5x - 2{,}5} + 2018 \cdot \log_2(3x - 1) + m = 2020$$

принадлежит промежутку $[1\,;3]$.

Ответ: $\boldsymbol{m \in [-8072; -2017]}$.

Решение:

Рассмотрим $f(x) = 2019 \cdot \sqrt[3]{3{,}5x - 2{,}5} + 2018 \cdot \log_2(3x - 1) + m - 2020$.

На области определения $D_f = \left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ функция монотонно возрастает, как сумма монотонно возрастающих функций. Уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение. Это решение будет принадлежать промежутку $[1\,;3]$ тогда и только тогда,

когда $\begin{cases} f(1) \le 0, \\ f(3) \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2019 + 2018 + m - 2020 \le 0, \\ 2019 \cdot 2 + 2018 \cdot 3 + m - 2020 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \le -2017, \\ m \ge -8072. \end{cases}$

4. Докажите, что для $a < 1,\ b < 1, c < 1\ \ a + b + c \ge \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \le \frac{125}{216}.$$

Доказательство:

Так как $a < 1,\ b < 1, c < 1$, то $1 - a > 0,\ 1 - b > 0,\ 1 - c > 0$.

Используя известное неравенство о средних, получим

$\sqrt[3]{(1 - a)(1 - b)(1 - c)} \le \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} = 1 - \frac{a+b+c}{3} \le \frac{5}{6}$ при условии, что $a + b + c \ge \frac{1}{2}$.

Следовательно, получили $\sqrt[3]{(1 - a)(1 - b)(1 - c)} \le \frac{5}{6}$.

Возведем в куб последнее неравенство и получим требуемое неравенство.

Таким образом, неравенство доказано.

5. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение, которое является квадратом. Найдите объем пирамиды, если сторона основания равна a, сторона квадрата в сечении равна b.

Ответ: $\boldsymbol{V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2b^2+2ab-a^2}}{12(a-b)}}$.

Решение:

Пусть H — длина высоты пирамиды, l — длина бокового ребра. Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H.$$

Выразим высоту H через a и b.

Так как $H^2 = l^2 - \frac{a^2}{3}$, $\frac{l}{a} = \frac{b}{a-b}$, то $H^2 = \frac{a^2b^2}{(a-b)^2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}(2b^2 + 2ab - a^2)^2$.

Следовательно,

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2b^2 + 2ab - a^2}}{12(a-b)}.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$(x - 2020)^2 + (x - 2020)^{10} = 2(x - 2020)^{12} .$$

Ответ: $\boldsymbol{\{2019; 2020; 2021\}}$.

Решение:

Пусть $t = x - 2020$, тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$t^2 + t^{10} = 2t^{12} .$$

Следовательно, $t = 0$ или $t = \pm 1$. Покажем, что других корней нет:

1) если предположить, что $t^2 > 1$, то $t^{10} > t^2$ и $t^{12} > t^2$.

2) если предположить, что $t^2 < 1$, то $t^{10} < t^2$ и $t^{12} < t^2$.

И в 1) и 2) случаях уравнение не станет тождеством.

Если $t = 0$, то $x = 2020$; если $t = \pm 1$, то $x = 2019$ или $x = 2021$.

2. Для того, чтобы пройти 4 км. пешком, проехать 6 км. на велосипеде и 40 км – на машине, дяде Ване требуется 2 час 12 мин. А если потребуется пройти 5 км. пешком, проехать 8 км. на велосипеде и 30 км – на машине, ему понадобится 2 часа 24 мин. Сколько времени потребуется дяде Ване, чтобы пройти 8 км. пешком, проехать 10 км. на велосипеде и 160 км – на машине?

Ответ: 5 часов 48 минут. (5,8 ч.)

Решение:

Пусть $\frac{1}{x}$,$\frac{1}{y}$,$\frac{1}{z}$ – скорости ходьбы, езды на велосипеде и машине соответственно.

Тогда составим систему, согласно условию задачи:

$$\begin{cases}4x+6y+40z=132,\\5x+8y+30z=144.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+3y=66-20z,\\5x+8y=144-30z.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=96-70z,\\y=40z-42.\end{cases}$$

Следовательно, $8x+10y+160z=8(96-70z)+10(40z-42)+160z=$ 348 мин.

$$348 \text{ мин.} = 5\text{часов } 48 \text{ мин.}$$

3. Найдите все значения m, при которых любое решение уравнения

$$2018\cdot\sqrt[5]{6{,}2x-5{,}2}+2019\cdot\log_5(4x+1)+m=2020$$

принадлежит промежутку $[1\,;6]$.

Ответ: $\boldsymbol{m\in[-6054;-2017]}$.

Решение:

Рассмотрим $f(x)=2018\cdot\sqrt[5]{6{,}2x-5{,}2}+2019\cdot\log_5(4x+1)+m-2020$.

На области определения $D_f=\left(-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$ функция монотонно возрастает, как сумма монотонно возрастающих функций. Уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение. Это решение будет принадлежать промежутку $[1\,;6]$ тогда и только тогда,

когда $\begin{cases}f(1)\le 0,\\f(6)\ge 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2018+2019+m-2020\le 0,\\2018\cdot 2+2019\cdot 2+m-2020\ge 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m\le -2017,\\m\ge -6054.\end{cases}$

4. Докажите, что для $a < 1,\ b < 1, c < 1\ \ a + b + c \geq \frac{1}{3}$ выполняется неравенство

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{512}{729}.$$

Доказательство:

Так как $a < 1,\ b < 1, c < 1$, то $1 - a > 0,\ 1 - b > 0,\ 1 - c > 0.$

Используя известное неравенство о средних, получим

$\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} = 1 - \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{8}{9}$ при условии, что $a + b + c \geq \frac{1}{3}$.

Следовательно, получили $\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{8}{9}$.

Возведем в куб последнее неравенство и получим требуемое неравенство.

Таким образом, неравенство доказано.

5. В основании пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD*, высотой которой является ребро *SA*=25. Точка *P* принадлежит медиане *DM* грани *SCD*, точка *Q* принадлежит диагонали *BD* и прямые *AP* и *SQ* пересекаются. Найдите длину *PQ*, если *BQ* : *QD* = 3 : 2.

Ответ: 10.

Решение:

Так как прямые *AP* и *SQ* пересекаются, то точки *A*,*P*, *S*,*Q* лежат в одной плоскости. Пусть *R*— точка пересечения *SP* и *AQ*. Тогда

$$\frac{RQ}{AQ} = \frac{DQ}{BQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{RQ}{RA} = \frac{2}{5}.$$

Докажем, что $\frac{RM}{RS} = \frac{2}{5}$. Отметим, что $\frac{DQ}{BA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DQ}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CD}{DQ} = \frac{1}{2}$.

Пусть *H*— точка ребра *SC* такая, что $RH \parallel DM$. Тога

$$\frac{CH}{HM} = \frac{CR}{RD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MS}{MH} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{MH}{SH} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{RM}{RS} = \frac{2}{5}.$$

Из подобия треугольников RPQ и RSA, получаем, что

$$\frac{PQ}{SA} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{PQ}{25} = \frac{2}{5} \Rightarrow PQ = 10.$$

Вариант 3

1. Решите в целых числах уравнение

$$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0.$$

Ответ: $\mathbf{(1;5;0),(-1;5;0),(1;1;0),(-1;1;0)}$.

Решение: Преобразуем уравнение к виду:

$$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7(y-3)^2 = 30.$$

Возможны 3 случая:

1) $|y-3| = 0$, 2) $|y-3| = 1$, 3) $|y-3| = 2$

В первом случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 30$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2) = 31$. Перебирая положительные множители числа 31, приходим к выводу, что решений в целых числах нет.

Во втором случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 23$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2) = 24$. Перебирая положительные множители числа 24, приходим к выводу, что решений в целых числах нет.

В третьем случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 2$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2) = 3$. Перебирая положительные множители числа 3, приходим к решениям:

1) $x = 1, z = 0$;   2) $x = -1, z = 0$.

Вспоминаем, что в этом случае $|y-3| = 2$, а следовательно, $y = 5, y = 1$.

Таким образом, получаем 4 решения: $(1;5;0),(-1;5;0),(1;1;0),(-1;1;0)$.

2. Найдите количество корней уравнения: $2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$.

Ответ: 4 корня.

Решение: Используя свойство логарифмов, перепишем уравнения в следующем виде

$$(x^2-2023)^{\lg 2} - \lg 2^{x^2-2022} = 0.$$

Введем обозначения $z = x^2 - 2023$, $a = \lg 2$, при этом $z > 0$, $a \in (0, 1)$. Тогда

$$z^a = (z+1)a.$$

Пусть $y_1(z) = z^a$, $y_2(z) = (z+1)a$.

Так как $y_1(1) = 1, y_2(1) = 2a$, причем $y_1(1) = 1 = \lg 10 > \lg 4 = 2\lg 2 = 2a$ и учитывая монотонность и выпуклость функций $y_1(z)$, $y_2(z)$ для $a \in (0, 1)$, получаем, что уравнение $z^a = (z+1)a$ имеет два корня z_1 и z_2 , один из которых, например z_1 меньше единицы, но больше нуля, а другой корень z_2 будет больше единицы. Тогда, вспоминая замену $z = x^2 - 2023$ и возвращаясь к исходной переменной x, приходим к выводу, что исходное уравнение будет иметь 4 корня: $\pm\sqrt{z_1 + 2023}, \pm\sqrt{z_2 + 2023}$.

3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1.$$

Доказательство: Прибавив к обеим частям неравенства число 2, получим

$$\left(\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2c}{3(a+b)} + \frac{2}{3}\right) \geq 3.$$

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9.$$

$$\big((b+c) + (a+c) + (a+b)\big)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9.$$

Используя, неравенство о средних

$$\begin{cases} (b+c) + (a+c) + (a+b) \geq 3\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)}, \\ \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{b+c}\cdot\dfrac{1}{a+c}\cdot\dfrac{1}{a+b}}, \end{cases}$$

получим

$$\left((b+c)+(a+c)+(a+b)\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$
$$\geq 3\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c}\cdot\frac{1}{a+c}\cdot\frac{1}{a+b}} = 9.$$

4. Докажите, что для корней $x_1,\ x_2,x_3$ многочлена ax^3-ax^2+bx+b с ненулевыми коэффициентами a и b справедливо равенство $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1.$

Доказательство: По теореме Виета имеем равенства

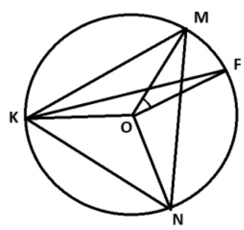
$$x_1+x_2+x_3=1,\ \ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{b}{a},\quad x_1x_2x_3=-\frac{b}{a}.$$

Тогда

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\,\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{x_1x_2x_3}=1\cdot\frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}}$$
$$=-1.$$

5. Равносторонний треугольник MNK вписан в окружность. На этой окружности взята точка F. Докажите, что величина $FM^4+FN^4+FK^4$ не зависит от выбора точки F.

Решение:



Без ограничения общности можно считать, что точка М лежит на дуге MN описанной окружности с центром O и радиусом R. Обозначим $\angle MOF=\alpha$. Тогда

$$FM=2R\sin(\alpha/2),\ \ FN=2R\sin((\angle MON-MOF)/2)=2\mathrm{R}\sin(60^\circ-\alpha/2),$$
$$FK=2R\sin((\angle MOK+MOF)/2)=2\mathrm{R}\sin(60^\circ+\alpha/2).$$

Покажем, что величина $FM^4+FN^4+FK^4$ не зависит от выбора точки F. Найдем

$$\frac{FM^4+FN^4+FK^4}{R^4}=16\left(\sin^4(\alpha/2)+\sin^4(60°-\alpha/2)+\sin^4(60°+\alpha/2)\right)=$$
$$=4((1-\cos\alpha)^2+(1-\cos(120°-\alpha))^2+(1-\cos(120°+\alpha))^2)=$$
$$=12-8\cos\alpha-16\cos\alpha\cos120°+2((1-\cos2\alpha)+(1-\cos(240°-2\alpha)$$
$$+(1-\cos(240°+2\alpha))=$$
$$=12-8\cos\alpha+8\cos\alpha+6-2\cos2\alpha-4\cos2\alpha\cos240°=18.$$

Следовательно, величина $FM^4+FN^4+FK^4$ не зависит от выбора точки F.

Учебная литература для подготовки к олимпиаде

Приведем список литературы и ресурсов в сети Internet, которые могут быть полезны в процессе подготовки. Хороших книг и отличных сайтов много, но мы предпочли сделать наш список как можно более компактным, чтобы он служил ориентиром того, на что, на наш взгляд, следует обратить внимание в первую очередь. Для того, чтобы сформировалась более цельная картина, мы не стали разбивать список на классы. Все ресурсы содержат адекватные описания, у вас не вызовет затруднения, изучая соответствующие материалы, понять целевую аудиторию конкретных мероприятий, курсов, литературы. Информационные ресурсы и сайты олимпиад

● olimpiada.ru — крупнейший информационный портал об олимпиадах в России

● vos.olimpiada.ru — сайт с информацией об этапах Всероссийской олимпиады школьников в городе Москве

● siriusolymp.ru — сайт школьного этапа Всероссийской олимпиады, проводимого Образовательным центром «Сириус»

● rsr-olymp.ru — сайт Российского совета олимпиад школьников

● mccme.ru — сайт Московского центра непрерывного математического образования

● turgor.ru — сайт Международного математического «Турнира городов»

● olympiads.mccme.ru/matprazdnik — сайт «Математического праздника» для 6 и 7 классов

● mmo.mccme.ru — сайт Московской математической олимпиады

● olymp.hse.ru/mmo — сайт олимпиады «Высшая проба»

● www.etudes.ru — сайт проекта «Математические этюды» Дистанционные курсы

● edu.sirius.online — бесплатные онлайн-курсы Образовательного центра «Сириус» Базы задач

● problems.ru — база задач с решениями, каталогизацией и поиском.

● zadachi.mccme.ru — информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» Интернет–библиотеки

● ilib.mccme.ru и mccme.ru/free-books — библиотеки математической литературы. Ряд книг, перечисленных ниже, доступны бесплатно на этих ресурсах Печатная учебная литература

● Серия книг «Школьные математические кружки»

● Сайт журнала «Квантик» kvantik.com

● Архив номеров журнала «Квант» kvant.mccme.ru

● Р. К. Гордин. Это должен знать каждый матшкольник. mccme.ru/free-books/pdf/gordin.pdf

● А. Канель, А. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи mccme.ru/free-books/olymp/KanKov.pdf

● «Ленинградские математические кружки» С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин

● Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел для математических школ mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf

● В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии mccme.ru/free-books/prasolov/planim5.pdf

● В. В. Прасолов Задачи по стереометрии

● В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу mccme.ru/free-books/prasolov/algebra.pdf

● В. В.Прасолов. Многочлены www.mccme.ru/free-books/prasolov/poly.pdf

● А. В. Акопян. Геометрия в картинках mccme.ru/free-books/akopyan/Akopyan.pdf

● Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин Комбинаторика Печатные сборники задач наиболее авторитетных математических олимпиад

● Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009 Заключительные этапы.

● В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1935–1957 mccme.ru/free-books/olymp/mmo-35-57.pdf

● В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1958–1967

● А. В. Бегунц и др. Московские математические олимпиады 1981–1992

● Р. М. Федоров и др. Московские математические олимпиады 1993–2005 mccme.ru/free-books/olymp/mmo1993.pdf

● Л. Э. Медников, А. В. Шаповалов Турнир городов: мир математики в задачах

● А. К. Толпыго Тысяча задач Международного математического Турнира городов

● Д. В. Фомин, К. П. Кохась Ленинградские математические олимпиады 1961–1991

● Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. Серия книг с 2012 по 2021 годы.

Учебное издание

Электронное издание

Гельфанова Диляра Дамировна

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Составитель:

Гельфанова Диляра Дамировна

Методические рекомендации

Подписано в печать 18.04.2024. Формат $60\times84^{1/16}$.
Гарнитура Times New Roman.
Уч.-изд. л. 1,8. Объем 1,16 печ. л.

Редакционно-издательский отдел Государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Республики Крым «Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова»
295015, г. Симферополь, пер. Учебный, 8